Equilibrium Limit of the Time Evolution Kernel

慶大・理工　福田 礼次郎、日暮 等

Minkowski 時空において確率過程量子化法を適用するときに問題となるのはequilibrium limit が存在し、それが通常の量子化の場合と一致するかどうかということである。これに関しては様々な文献が出ているが、それらは二つのタイプに分類できる。一つはダイアグラムを使った証明法であり、他方はFokker-Planck formalism を用いた方法である。今回、我々が行った証明方法は Hüffel と Rumpf* によって使われた方法をより厳密にしたものであり、代数的手法を用いた証明といってもよい。以下、作用が

$$S(\phi) = \int d^D x \, \{ \tfrac{1}{2}(\partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - (m^2 - i\varepsilon)\phi^2(x)) - V(\phi(x)) \} \tag{1}$$

で与えられるD次元時空のスカラー場ϕを例にとって説明する。上の作用において、Feynman prescriptionを採用している。つまり、質量の平方に無限小の負の虚部を付け加えている。この手続きはequiliburium limitが存在するために必要で、かつその結果のcausal propertyを保証していることが以下で理解できる。

Langevin 方程式を

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = i \frac{\delta S(\phi)}{\delta \phi(x)}\bigg|_{\phi(x)=\phi(x,t)} + \eta(x,t)$$

$$= i(\Box + m^2 - i\varepsilon)\phi(x,t) - iV'(\phi(x,t)) + \eta(x,t) \tag{2}$$

で与える。ここで、t はfictitious time、$\eta(x,t)$ は Gaussian white noise で以下の性質を満たす。

$$\langle \eta(x,t) \rangle_\eta = 0 , \tag{3a}$$

$$\langle \eta(x,t)\eta(x',t') \rangle_\eta = 2\delta^D(x-x')\delta(t-t')$$

$$= \frac{\int [d\eta] \eta(x,t)\eta(x',t') \exp(-\frac{1}{4}\int d^D x \int_0^\infty d\tau \, \eta^2(x,\tau))}{\int [d\eta] \exp(-\frac{1}{4}\int d^D x \int_0^\infty d\tau \, \eta^2(x,\tau))} \tag{3b}$$

次に、fictitious time t に関して同時刻の相関函数の母函数を次式で定義する。

* H. Hüffel and H. Rumpf, Phys. Lett. **148B** (1984) 104.

$$Z(J;t) \equiv \left\langle \exp\left(i\int d^{\mathrm{D}}x\ J(x)\phi(x,t)\right)\right\rangle_\eta \tag{4}$$

$\phi(x,t)$ は適当な初期条件 $\phi(x,0)$ のもとでのLangevin 方程式(2)の解である。

証明の手順を列挙すると以下のようになる。

(i) $Z(J;t)$ の時間発展方程式を作る。

(ii) その方程式の V についての摂動解を構成し、摂動の各オーダーについて $t\to\infty$ のlimitをとる。

(iii) (ii)で求めたlimitがcausal Green函数の母函数

$$Z_{\mathrm{QFT}}(J) \equiv \frac{\int[d\phi]\exp(iS(\phi)+i\int d^{\mathrm{D}}x\ J(x)\phi(x))}{\int[d\phi]\exp(iS(\phi))} \tag{5}$$

の V に関する摂動展開の各オーダーと一致することを示す。

最初のステップは、方程式(4)を t に関して微分し、Langevin方程式(2)と関係式

$$\left\langle \eta(x,t)\exp\left(i\int d^{\mathrm{D}}x\ J(x)\phi(x,t)\right)\right\rangle_\eta = iJ(x)Z(J;t) \tag{6}$$

を使うと、$Z(J;t)$ に関する時間発展方程式

$$\frac{\partial Z(J;t)}{\partial t} = \int d^{\mathrm{D}}x\ J(x)\left\{(\Box+m^2-i\varepsilon)\frac{\delta}{i\delta J(x)} + V'\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right) + J(x)\right\}Z(J;t) \tag{7}$$

が導ける。$J(x)$ と $\delta/\delta J(x)$ の運動量表示

$$\left.\begin{aligned} J(x) &= (2\pi)^{-\mathrm{D}/2}\int d^{\mathrm{D}}p\, e^{-ip\cdot x}J(p) \\ \frac{\delta}{\delta J(x)} &= (2\pi)^{-\mathrm{D}/2}\int d^{\mathrm{D}}p\, e^{ip\cdot x}\frac{\delta}{\delta J(p)} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

を導入すれば(7)は

$$\frac{\partial Z(J;t)}{\partial t} = (L_1 + L_2 + L_{\mathrm{I}})Z(J;t) \tag{9}$$

と書き直せる。ここで、演算子 L_1、L_2、L_{I} は次式で定義される。

$$L_1 \equiv -\int d^{\mathrm{D}}p\ G(p)^{-1}J(p)\delta/\delta J(p)\ , \tag{10a}$$

$$G(p) \equiv \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\ , \tag{10b}$$

$$L_2 \equiv \int d^{\mathrm{D}}p\ J(p)J(-p)\ , \tag{10c}$$

$$L_{\rm I} \equiv -i\int d^{\rm D}p\ J(p)[J(-p),\ \tilde{V}(\delta/i\delta J)]\ , \tag{10d}$$

$$\tilde{V}(\delta/i\delta J) \equiv \int d^{\rm D}x\ V((2\pi)^{-{\rm D}/2}\int d^{\rm D}q\ {\rm e}^{-ix\cdot q}\ \delta/i\delta J(q)) \tag{10e}$$

ところで、方程式(9)の形式解は

$$Z(J;t) = \exp\{t(L_1 + L_2 + L_{\rm I})\}F(J) \tag{11}$$

とかける。$F(J)$はLangevin方程式(2)に対する初期条件$\phi(x,0)$を与えることによってきまる。すなわち

$$Z(J;0) = F(J) = \exp(i\int d^{\rm D}p\ J(-p)\phi(p,0)) \tag{12}$$

である。 (11)において時間発展演算子$\exp\{t(L_1+L_2+L_{\rm I})\}$を以下のように相互作用による部分とfreeな部分とに分ける。

$$\exp\{t(L_1 + L_2 + L_{\rm I})\} \ = \ g(t)\ \exp\{t(L_1 + L_2)\}\ , \tag{13a}$$

$$g(t) \ \equiv \ {\rm T\_exp}(\ \int_0^t d\tau\, {\rm e}^{\tau(L_1+L_2)}\ L_{\rm I}\ {\rm e}^{-\tau(L_1+L_2)}\ ) \tag{13b}$$

ここで、$g(t)$が相互作用による効果で、T_は反時間順序積を表している。L_1と$J(p)$がclosed algebra

$$[L_1,\ J(p)] = i(p^2 - m^2 + i\varepsilon)\, J(p) \tag{14}$$

を作ることに注意すれば

$$\begin{aligned}\exp\{t(L_1+L_2)\} &= \exp\{-\tfrac{1}{2}\int d^{\rm D}p G(p) J(p) J(-p)\}\exp(tL_1)\exp\{\tfrac{1}{2}\int d^{\rm D}p G(p) J(p) J(-p)\} \\ &\equiv W(J)\exp(tL_1)\, W^{-1}(J)\end{aligned}$$

となることが分かるので、結局$g(t)$は

$$g(t) = W(J) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_n\ L_{\rm I}(t_n) \int_{t_n}^t dt_{n-1}\ L_{\rm I}(t_{n-1}) \cdots \int_{t_2}^t dt_1\ L_{\rm I}(t_1)\, W^{-1}(J) \tag{15}$$

$$L_{\rm I}(t) \equiv {\rm e}^{tL_1} W^{-1}(J) L_{\rm I} W(J) {\rm e}^{-tL_1} \tag{16a}$$

と展開できる。$L_{\rm I}$の定義(10)、及び関係式$\delta W(J)/\delta J(p) = -G(p)J(-p)\, W(J)$を使って(16a)を書きなおせば

$$\begin{aligned}L_{\rm I}(t) \ &= \ iL_1 \exp(tL_1)\, W^{-1}(J)\, \tilde{V}(\frac{\delta}{i\delta J})\, W(J)\exp(-tL_1) \\ &\quad + \ i\int d^{\rm D}p\ J_t(p)\, G^{-1}(p)\, W^{-1}(J_t)\, \tilde{V}(\frac{\delta}{i\delta J_t})\, W(J_t) \frac{\delta}{\delta J_t(p)}\end{aligned} \tag{16b}$$

と表せる。但し、$J_t(p)$は次のスケール変換で定義される。

$$J_t(p) \equiv \exp(tL_1)J(p)\exp(-tL_1) = e^{it(p^2-m^2+i\varepsilon)}J(p) \tag{17}$$

方程式(13)、(15)を(11)に代入すれば方程式(9)の摂動解

$$Z(J;t) = W(J)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{(n)}(J;t,0) \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{(0)}(J;t,\tau) &= \exp(tL_1)W^{-1}(J)F(J) = W^{-1}(J_t)F(J_t) \\ \Delta^{(n)}(J;t,\tau) &= \int_\tau^t ds\ L_{\mathrm{I}}(s)\ \Delta^{(n-1)}(J;t,s)\ , \quad \text{for} \quad n=1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

が求まる。次のステップは(18)の各項において$t\to\infty$の limitを計算することである。このためには(19)の漸化式が役にたつ。$J_t(p)$はdamping factor $e^{-\varepsilon t}$がかかっているので$t\to\infty$でゼロになる。それ故、$n=0$の free partは

$$\Delta^{(0)}(J;\infty,\tau) = W(0)F(0) = 1 \tag{20a}$$

となる。この結果は自由場($V=0$)の時のequilibriumm limitの証明を与えている。というのは$W(J)$が自由なスカラー場のcausal Green函数の母函数になっているからである。$n=1$の場合は(19)と(16b)を使って

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(J;\infty,\tau) &= i\int_\tau^\infty ds\ L_1\exp(sL_1)W^{-1}(J)\tilde{V}(\delta/i\delta J)W(J) \\ &= -\int_\tau^\infty ds\ \frac{\partial H^{(1)}(J_s)}{\partial s} \\ &= H^{(1)}(J_\tau) - H^{(1)}(0) \end{aligned} \tag{20b}$$

となる。ここで$H^{(n)}(J)$は次式で定義されるJの多項式である。

$$H^{(n)}(J) \equiv W^{-1}(J)\frac{1}{n!}\{i\tilde{V}(\delta/i\delta J)\}^n W(J), \quad \text{for} \quad n=0,1,2\cdots \tag{21}$$

一般に摂動のn次は

$$\Delta^{(n)}(J;\infty,\tau) = H^{(n)}(J_\tau) - \sum_{l=0}^{n-1}\Delta^{(l)}(J;\infty,\tau)\ H^{(n-l)}(0) \tag{22}$$

であることが、数学的帰納法を使って証明することができる。

最後のステップは(5)の摂動展開の第n次項と$\lim_{t\to\infty} W(J)\Delta^{(n)}(J;t,0)$が一致することを示せばよい。$Z_{\mathrm{QFT}}$の摂動展開は次のようになる。

$$Z_{\mathrm{QFT}}(J) = \frac{\exp\{-i\tilde{V}(\delta/i\delta J)\}\,W(J)}{[\exp\{-i\tilde{V}(\delta/i\delta J)\}\,W(J)]_{J=0}} = \frac{W(J)\sum_{n=0}^{\infty}H^{(n)}(J)}{\sum_{n=0}^{\infty}H^{(n)}(0)}$$

$$\equiv W(J)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{\mathrm{QFT}}^{(n)}(J) \tag{23}$$

これから、第nオーダー$\Delta_{\mathrm{QFT}}^{(n)}$に関しての、次の漸化式が導ける。

$$\begin{cases} \Delta_{\mathrm{QFT}}^{(0)}(J) = 1 \\ \Delta_{\mathrm{QFT}}^{(n)}(J) = H^{(n)}(J) - \sum_{l=0}^{n-1}\Delta_{\mathrm{QFT}}^{(l)}(J)\,H^{(n-l)}(0) \end{cases} \tag{24}$$

これは、$\Delta^{(n)}(J;\infty,0)$が満たす漸化式と同一である。それ故、任意の$n(\geq 0)$に対して

$$\Delta^{(n)}(J;\infty,0) = \Delta_{\mathrm{QFT}}^{(n)}(J)$$

が成立し、従って(18)、(23)により摂動論の意味で

$$\lim_{t\to\infty} Z(J;t) = Z_{\mathrm{QFT}}(J)$$

であることが証明できた。

詳しくは、"Equilibrium Limit of the Stochastic Quantization in Minkowski Space", R. Fukuda and H. Higurashi, (to be published in Phys. Lett. B) をご参照下さい。

Wigner 関数，伏見関数
―量子力学における位相空間分布関数―

明治大学・和泉　中　村　孔　一

量子力学的な状態を特徴づける分布関数を座標と運動量の組 ―― 位相空間の点 ―― の関数として表わす試みは，1932年にE. Wignerによって提唱された。[1] その後，伏見によって，やや異なる形の同様な分